E.N.S I T A et T S Strasbourg -1992-

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS

DUREE : 1 heure

N.B. : *Ce sujet comporte 2 pages de texte.*

Dans tout le problème a et b sont deux réels donnés : a < b.

1. Soit g une fonction numérique définie sur [a, b], de classe C^2 et telle que :
   $g(a) = g(b) = 0$
   $g''(x) > 0$ pour tout x de]a, b[.
   Montrez que g admet un minimum en un point x_0 de]a, b[et que $g(x) < 0$ pour tout x de]a, b[.

2. Dans cette question (2) et la suivante (3) f désigne une fonction numérique définie sur [a, b], de classe C^2 telle que :
   (i). $f(a) < 0$, $f(b) > 0$
   (ii). $f'(x) > 0$ pour tout x de [a, b]
   (iii). $f''(x) > 0$ pour tout x de]a, b[.

   a. Montrez qu'il existe un unique point c de]a, b[tel que $f(c) = 0$ et qu'il existe deux constantes m et M telles que :
   $0 < m \leq f'(x)$
   $0 \leq f''(x) \leq M$ pour tout x de [a, b].

   b. Soit p le polynôme de degré 1 tel que $p(a) = f(a)$ et $p(b) = f(b)$ et soit c_1 le zéro de p, montrez que :
   $a < c_1 < c$.

   c. Soit q le polynôme de degré 2 tel que $q(a) = f(a)$, $q(b) = f(b)$, et $q(c_1) = f(c_1)$. Explicitez le polynôme q-p et vérifiez qu'il existe un point d de]a, b[tel que :
   $f''(d) = q''(d)$.
   En déduire :
   $$|f(c_1)| \leq \frac{M}{2} (c_1-a)(b-c_1).$$

3. Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ la suite récurrente réelle définie de la façon suivante :

   . $c_o = a$

   . pour tout $n\geq 0$ (c_n étant défini) on note p_n le polynôme de degré 1 tel que $p_n(c_n) = f(c_n)$ et $p_n(b) = f(b)$, et l'on définit c_{n+1} unique zéro de p_n.

   Etablir que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, convergente vers c (cf. 2) et que pour tout $n\geq 0$:

$$|c_n - c| \leq \frac{1}{m} |f(c_n)| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} (c_n - c_{n-1})(b-a).$$

4. Montrez que la fonction numérique $f(x) = x - 2\,\ell n(1+x)$ vérifie les hypothèses de 2. sur l'intervalle [2, 3] et calculez numériquement les termes de la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ associée, tant que $|c_n - c| \geq 10^{-4}$.

5. Comment les résultats obtenus dans la troisième question seraient-ils à modifier si f vérifiait les hypothèses (i) et (ii) de la deuxième question et si de plus : $f''(x) < 0$ quel que soit x de]a, b[?

   En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près du zéro de $f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.